

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω ένα σημείο $x \in X$, το x λέγεται σημείο συσσώρευσης του συνόλου $A \subseteq X$ εάν για κάθε περιοχή του x , U_x ισχύει: $U_x \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$ (δηλ. κάθε περιοχή του x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A διαφορετικό του x).

Σημείωση: ένα σημείο συσσώρευσης ενός συνόλου A δεν είναι απαραίτητα σημείο του συνόλου.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $A \subseteq X$ ($X \subseteq \mathbb{R}$) και $x \in X$. Το x λέγεται ω -σημείο συσσώρευσης του A εάν κάθε περιοχή του x , U_x περιέχει άπειρα πλήθος στοιχείων του συνόλου A .

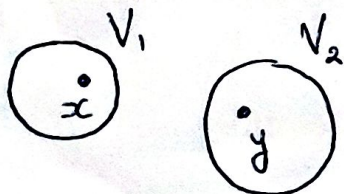
ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας τοπ. χώρος X λέγεται T_1 αν $\forall x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχουν περιοχές V_1 (περιοχή του x) και V_2 (περιοχή του y) τέτοιες ώστε $x \notin V_2$ και $y \notin V_1$.

Σημείωση: Οι περιοχές V_1 και V_2 δεν είναι κατα ανάγκη ξένες μεταξύ τους.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας τοπ. χώρος X είναι T_2 (ή Hausdorff) αν $\forall x, y \in X$ υπάρχουν V_1 περιοχή του x και V_2 του y τέτοιες ώστε $V_1 \cap V_2 = \emptyset$



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Σύμφωνα με τους ορισμούς κάθε T_2 χώρος είναι και T_1 .

- Στους T_1 χώρους οι έννοιες του σημείου συσώρευσης και του ω -σημείου συσώρευσης ταυτίζονται.
- Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική $d(x,y) = |x-y|$.
Ο $\mathbb{R}$ είναι ένας T_2 χώρος (άρα και T_1).
Στον $\mathbb{R}$ εάν a είναι ένα σημείο συσώρευσης του $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε κάθε περιοχή του a έχει άπειρα στοιχεία του συνόλου A .
- Έστω $L \in \mathbb{R}$ και $A \subseteq \mathbb{R}$ και L σημείο συσώρευσης του A , άρα κάθε περιοχή του L περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο A διαφορετικό του L . Θεωρούμε την περιοχή $B_0(L, \frac{1}{n})$ σύμφωνα με τα παραπάνω $\exists x_n \in B_0(L, \frac{1}{n}) \cap A, \forall n$ τότε $|x_n - L| < \frac{1}{n}$ άρα $x_n \xrightarrow{n} L$. Οπότε βρήκαμε ακολουθία που να έχει όριο το σημ. συσ. L . (Μπορώ να βρώ και υπακολουθία της τ.ω. $x_n \rightarrow L$ με όρους διαφορετικούς δηλ. $x_{n_k} \neq x_{n_l}$ εάν $k \neq l$).
- αντιστροφή εάν $L \in \mathbb{R}$ και $\exists (x_n) \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $x_n \rightarrow L$ τότε εάν $r > 0$ και $B(L, r)$ εφόσον αυτή είναι περιοχή του L και εφόσον $x_n \rightarrow L$ έπεται $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $x_n \in B(L, r) \forall n \geq n_0$ άρα την τυχαία περιοχή του L , $B(L, r)$ περιέχονται άπειρα στοιχεία του A .
- Συμβολισμός: A' : το σύνολο των σημείων συσώρευσης του συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Τότε $a \in A'$ αν και μόνο αν $\exists (x_n) \subseteq A$ με $\lim x_n = a$ και $x_n \neq x_m$ για $n \neq m$.

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Εστω $A \subseteq \mathbb{R}^*$ με A'' συμβολίζουμε το γενικευμένο παράγωγο σύνολο του A το οποίο είναι το σύνολο των στοιχείων του $\mathbb{R}^*$ που είναι όρια ακολουθιών (x_n) στοιχείων του A με $x_n \neq x_m$, $n \neq m$.

- Εστω $A = (0, 1)$ τότε $A' = [0, 1]$ και $A'' = [0, 1]$.
- Εστω $A = \mathbb{N}$ τότε $A' = \emptyset$, $A'' = \{+\infty\}$.
- Εστω $A = (0, \infty)$ τότε $A' = [0, +\infty)$ ενώ $A'' = [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$.

Σημείωση: Εάν A είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε $A'' = A'$.

- Εάν το A δεν είναι ανω φραγμένο τότε $+\infty \in A''$.
- Εάν το A δεν είναι κάτω φραγμένο τότε $-\infty \in A''$.
- Στον χώρο $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ θεωρούμε το σύνολο $B(y, \delta)$ που ορίζεται ως εξής:

$$\text{αν } y \in \mathbb{R} \text{ τότε } B(y, \delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta\}$$

$$\text{αν } y = +\infty \text{ τότε } B(y, \delta) = \{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{\delta}\} = (\frac{1}{\delta}, +\infty)$$

$$\text{αν } y = -\infty \text{ τότε } B(y, \delta) = \{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{1}{\delta}\} = (-\infty, -\frac{1}{\delta})$$

$$\text{Ενώ με } B_0(y, \delta) = B(y, \delta) \setminus \{y\}$$

ΑΝΩΤΕΡΟ ΚΑΙ ΚΑΤΩΤΕΡΟ ΟΡΙΟ

Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών.
το ανώτερο όριο ($\limsup a_n$) ορίζεται ως εξής:

$$\limsup a_n = \inf_k \sup \{a_n : n \geq k\}$$

ενώ το κατώτερο όριο της (a_n) ($\liminf a_n$) είναι:

$$\liminf a_n = \sup_k \inf \{a_n : n \geq k\}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

- Υπάρχει υποακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) τέτοια ώστε $\lim a_{k_n} = \liminf a_n$.
- Υπάρχει υποακολουθία (a_{l_n}) της (a_n) τέτοια ώστε $\lim a_{l_n} = \limsup a_n$.

Σημείωση: Τα $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$ υπάρχουν πάντα για κάθε ακολουθία (a_n) και είναι στοιχεία του $\mathbb{R}^*$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εάν $(a_n) \in \mathbb{R}$ τότε το $\liminf a_n$ είναι το μικρότερο από τα $x \in \mathbb{R}^*$ και είναι τέτοια ώστε να υπάρχει υποακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) με $\lim a_{k_n} = x$, ενώ το $\limsup a_n$ είναι το μεγαλύτερο από τα $x \in \mathbb{R}^*$ και για τα οποία υπάρχει υποακολουθία (a_{l_n}) της (a_n) με $\lim a_{l_n} = x$.

- Εάν $(a_n) \in \mathbb{R}$ και $\lim a_n = l \in \mathbb{R}^*$ τότε $\liminf a_n = \limsup a_n = \lim a_n = l$.

παράδειγμα

• Έστω $a_n = (-1)^n$ τότε $\lim a_{2n} = 1$, $\lim a_{2n+1} = -1$
αρα $\liminf a_n = -1$, $\limsup a_n = 1$.

• Έστω $a_n = \frac{1}{n^2}$ $\lim a_n = 0$, $\liminf a_n = \limsup a_n = \lim a_n = 0$

• Έστω $a_n = n$ $\lim a_n = +\infty$ $\liminf a_n = \limsup a_n = \lim a_n = +\infty$

Σημείωση: Εάν μια ακολουθία δεν είναι ανω φρα-
γμένη τότε $\limsup a_n = +\infty$.